Издательство Грамота

Педагогика. Вопросы теории и практики
Pedagogy. Theory & Practice

ISSN 2686-8725 (online)
ISSN 2500-0039 (print)

2022. Том 7. Выпуск 4. С. 408-414 | 2022. Volume 7. Issue 4. P. 408-414
Материалы журнала доступны на сайте (articles and issues available at): pedagogy-journal.ru

RU

Изучение понятия изоморфизма в университетском курсе алгебры как способ формирования математической грамотности будущих учителей математики

Макаридина В. А.

Аннотация. Цель исследования состоит в выявлении особенностей формирования понятия изоморфизма на математических факультетах университетов при обучении бакалавров педагогического направления подготовки. В статье приводятся примеры изоморфных систем, изучаемых в школьном и вузовском курсах математики, предлагается метод проверки свойства ассоциативности на основании теоремы Кэли об изоморфизме, приводятся ситуации использования изоморфизма систем при решении вычислительных задач. Научная новизна исследования заключается в предложенном методе проверки свойства ассоциативности операции в конечных группоидах. В результате с помощью конкретных случаев применения изоморфизма показано, что данный феномен выступает важным компонентом математической грамотности будущих учителей математики.

EN

Studying the Concept of Isomorphism in the University Algebra Course as a Way of Mathematical Literacy Formation in Future Mathematics Teachers

Makaridina V. A.

Abstract. The aim of the research is to identify the particularities of formation of the isomorphism concept at mathematical faculties of universities when teaching undergraduate teacher training students. The paper provides examples of isomorphic systems studied in school and university mathematics courses, suggests a method for checking the associative property based on the Cayley's theorem on isomorphism, presents situations where isomorphism of systems is used to solve computational problems. Scientific novelty of the research lies in the proposed method of checking the associative property of an operation in finite groupoids. As a result, using specific cases of isomorphism application, it has been shown that this phenomenon is an important component of mathematical literacy of future mathematics teachers.

Введение

Понятие изоморфизма в математике является одним из основных. Исторически именно благодаря появлению этого феномена возникла такая область математики, как современная алгебра. С точки зрения философии понятие изоморфизма означает равенство с точностью до обозначения. Но простота этого определения обманчива. Поэтому с самого начала серьезного изучения математики важно правильно и последовательно формировать это понятие у будущих учителей математики.

Профессиональная компетентность учителя математики «предполагает овладение комплексом частных знаний, организованных в целостную систему» (Делюкова, 2020, с. 94). «Системный подход является основополагающим направлением методологии исследования», – отмечает И. К. Сиротина (2021, с. 117). Реализация системного подхода при подготовке учителей математики предполагает, в частности, тесное взаимодействие преподавателя и студента, активную познавательную деятельность обучаемых, формирование математической грамотности. «Применяемая технология обучения математическим дисциплинам должна быть адекватной особенностям организуемой учебной деятельности», – подчеркивает И. В. Игнатьева (2021, с. 134).

Главным результатом подготовки будущих учителей математики следует считать не столько систему полученных знаний в области различных разделов математики, сколько способность понимать роль математики,

Научная статья (original research article) | https://doi.org/10.30853/ped20220065

умение обосновывать математические рассуждения. Основные курсы математики в педагогических вузах обычно начинались с вводных курсов, например с курса «Введение в специальность». Это оправдывалось недостаточной математической подготовкой первокурсников, существенным отрывом вузовской алгебры от школьной, появлением абстрактных понятий в курсе высшей алгебры. В настоящее время от пропедевтических курсов математики во многих педагогических вузах отказались. В результате появилась необходимость сместить акценты при изучении некоторых вопросов. Одним из таких вопросов является формирование понятия изоморфизма. Понимание сущности этого понятия часто позволяет упростить выполнение той или иной задачи, сведя ее к равносильной. Необходимость разработки вопроса формирования понятия изоморфизма на математических факультетах университетов при обучении бакалавров педагогического направления подготовки и обосновывает актуальность выбранной темы.

Задачи исследования:

– рассмотреть известные науке попытки определения термина «математическая грамотность будущих учителей математики»;

– рассмотреть особенности изучения понятия изоморфизма в курсе алгебры на математических факультетах университетов;

– представить методические рекомендации по формированию математической грамотности будущих учителей математики при изучении понятия изоморфизма различных алгебраических систем.

Основным методом исследования является описательный метод, включающий наблюдение, сопоставление, обобщение. При описании приема доказательства свойств операций используется метод дедукции, позволяющий от общей идеи изоморфизма систем перейти к рассмотрению частных группоидов.

Практическая значимость. Результаты данного исследования будут полезны при обучении бакалавров педагогического направления подготовки с целью формирования у них математической грамотности посредством изучения понятия изоморфизма различных алгебраических систем.

Основная часть

В Исследованиях PISA математическая грамотность определяется как «способность индивидуума проводить математические рассуждения и формировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира» (PISA 2018..., 2019, с. 75). Л. О. Рослова и И. И. Карамова (2020) в своем исследовании уточняют, что для учителя математики «математическая грамотность включает в себя использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и прогнозирования явлений» (с. 15). На наш взгляд, «математическая грамотность учителя – это базовая характеристика педагогической компетентности» (Социология управления, 2020, с. 236). «Математическая грамотность является индикатором, который позволяет измерить уровень квалификации учителя» (Семенов, Макаридина, 2022, с. 171).

Следует отметить, что строгое использование математических терминов в школьной математике далеко не всегда возможно. Например, параболу в школе определяют как график квадратичной функции. Под действительным числом школьники понимают десятичную дробь. И на данном этапе обучения этого вполне достаточно. Но этого недостаточно для учителя. Учитель должен знать и определение параболы, и определение действительного числа. Математическая грамотность учителя математики предполагает и умение доказать, что график квадратичной функции удовлетворяет определению параболы. С понятием действительного числа дело обстоит гораздо сложнее. Определение действительного числа и доказательства связанных с ним основных теорем появились только в конце XIX века. Ясно, что появление десятичных дробей обязано десятичной системе счисления, а она возникла благодаря тому, что у человека десять пальцев на руках. Но привязывать понятие действительного числа к анатомии человеческого тела просто некорректно. Доказательство того, что любое действительное число можно записать десятичной дробью, достаточно трудоемко. Но учитель должен хотя бы знать, что оно существует. Это тоже элемент математической грамотности.

Вряд ли можно дать формальное определение математической грамотности, включающее все ее элементы. Еще сложнее однозначно определить, обладает ли студент математического факультета или даже учитель математической грамотностью в достаточной мере. Однако, без сомнения, основным элементом математической грамотности следует считать умение правильно рассуждать. И при обучении студентов математике это следует иметь в виду в первую очередь.

При изучении некоторых понятий абстрактной алгебры бывает очень полезно свести одни объекты к другим, уже известным. В этой связи наиболее важным для изучения алгебры является понятие изоморфизма. Е. С. Ляпин, один из основателей теории полугрупп – теории ассоциативных операций – считал понятие изоморфизма основным понятием современной алгебры. «Абстрактное направление в современной алгебре состоит в том, что одно или несколько алгебраических действий в множестве изучаются только с точки зрения результатов этих действий, безотносительно каких-либо иных свойств элементов, составляющих данное множество. Точнее эта точка зрения оформляется при помощи понятия изоморфных мультипликативных множеств. В отношении вопросов, связанных лишь с характером действий, изоморфные мультипликативные множества совершенно одинаковы и даже могут рассматриваться как одно и то же мультипликативное множество с различным обозначением элементов», – отмечает Е. С. Ляпин (1960, с. 13).

Две однотипные алгебраические системы называются изоморфными, если существует биективное отображение одной из них на другую, сохраняющее все операции и отношения.

Говоря о трудности восприятия студентами термина «изоморфизм», Е. А. Швед (2017) подчеркивает, что «при изучении любых математических понятий, в том числе и абстрактных, психологически важным аспектом является не только смысловая нагрузка самого понятия, но и его прикладные аспекты, особенно некая связь с реально существующими объектами, интуитивно приводящие к этому понятию» (с. 233).

Преодоление трудности при изучении изоморфизма, несомненно, приводит к тому, что абсолютно разные по тематике и содержанию задачи начинают восприниматься как одинаковые, имеющие изоморфные модели, а значит, одинаковые методы решения. «Адекватное (изоморфное) отражение существенных черт явления и простота его восприятия являются основными неотъемлемыми признаками наглядности» (Фирстов, 2017, с. 3).

Впервые с изоморфными системами сталкиваются еще в 5-6 классах при изучении рациональных чисел. Без строгих определений и формальных доказательств, опираясь только на интуицию, учитель математики дает понять, что система обыкновенных дробей с операциями сложения и умножения и отношением сравнения дробей по величине и система конечных и бесконечных периодических десятичных дробей с этими же операциями и этим же отношением – это две системы, отличающиеся только обозначением элементов.

Другим примером изоморфных систем, с которыми встречаются школьники, является множество векторов-отрезков пространства с операциями сложения и умножения на действительные числа и множеством всех упорядоченных троек действительных чисел (координатами векторов в декартовой системе координат) с теми же операциями. Фактически второе множество представляет собой трехмерное арифметическое векторное пространство. А множество векторов-отрезков с операциями сложения и умножения на числа и с действием скалярного умножения оказывается изоморфным трехмерному евклидову пространству. Разумеется, такие понятия в школе не вводятся, но говоря о скалярном произведении векторов-отрезков в координатной форме, учитель фактически говорит об изоморфизме этих систем.

В университете на математических факультетах теоремы об изоморфизме систем доказываются регулярно. Приведем примеры, позволяющие свести изучение одних систем к изучению других, более естественных и более доступных для понимания.

Изучение алгебры на математических факультетах начинается с рассмотрения арифметического пространства. Это понятие не вызывает особых затруднений. А вот абстрактное понятие линейного пространства над полем воспринимается совсем по-другому. Студенты далеко не всегда могут проверить даже по определению, является ли множество линейным пространством. А нахождение базиса и размерности пространства всегда вызывает большие трудности. В связи с этим студенты с некоторым облегчением воспринимают теорему о том, что любое n-мерное линейное пространство изоморфно n-мерному арифметическому.

Установить изоморфизм двух систем, одна из которых уже изучена, весьма полезно. Наиболее показательным примером здесь является алгебра матриц и алгебра линейных операторов. Студенты воспринимают матрицу как таблицу чисел, с которой надо работать определенным образом, но все же сводить эту работу к работе с числами. Что же касается алгебры линейных операторов, то здесь все обстоит гораздо сложнее. Само определение линейного оператора достаточно абстрактно. И здесь очень важно понять, что изучение линейных операторов можно свести к изучению матриц – алгебра линейных операторов и алгебра матриц изоморфны.

Наибольшие трудности при изучении курса алгебры вызывают элементы современной алгебры, а именно, теория групп, колец и полей. Пожалуй, среди множества всех групп (группа – множество с ассоциативной операцией, в котором имеется единица и в котором каждый элемент обладает обратным) студентам наиболее понятен класс, состоящий из аддитивной группы целых чисел и групп ее классов вычетов. Поэтому важно доказать, что любая циклическая группа изоморфна одной из групп этого класса.

Понятие подстановки на конечном множестве известно со школы и не вызывает затруднений. Студенты легко справляются с умножением подстановок и без труда строят таблицы умножения всех подстановок конечного множества. В связи с этим важно доказать, что любая группа изоморфна некоторой группе подстановок (теорема Кэли). Конечно, это не решение проблемы изучения теории групп, но для студентов психологически важно узнать, что абстрактные группы можно свести к конкретным группам подстановок.

Таким образом, теоремы об изоморфизме дают студентам возможность при изучении новых структур использовать свойства уже известных алгебраических систем, изоморфных этим структурам.

Элементы современной алгебры (теория групп, теория колец и теория полей) изучаются бакалаврами в курсе алгебры во втором семестре на 1 курсе. Наиболее естественной при этом является задача выяснения, является ли данное множество относительно данной бинарной операции (или двух бинарных операций) группой (кольцом, полем). При решении этих задач числовые множества с арифметическими операциями не вызывают особых затруднений. Это и естественно – свойства арифметических операций известны со школы. Что же касается нечисловых множеств (множества матриц, множества подстановок, множества операторов), то здесь с проверкой свойств операций дело обстоит сложнее. Поэтому решение подобных задач следует начинать с исследования конечных множеств с бинарной операцией – конечных группоидов. Дело в том, что бинарную операцию на конечном множестве можно задать или однозначно описать таблицей (такая таблица называется таблицей Кэли). По таблице Кэли легко проверить почти все основные свойства операции. При этом проверка коммутативности операции, наличия нулевого или нейтрального элементов, наличия обратного элемента для данного (при существовании нейтрального элемента) осуществляется фактически устно. Например, операция является коммутативной, если таблица Кэли симметрична относительно главной диагонали. Система имеет левый ноль, если в таблице Кэли существует строка, в которой все элементы повторяют заглавный элемент этой строки. Система имеет правый нейтральный элемент, если в таблице Кэли есть столбец, повторяющий заглавный.

Единственной трудностью является проверка ассоциативности операции. Однако теорема Кэли позволяет проверить и это свойство.

Покажем, как можно это сделать.

Изоморфизм произвольной мультипликативной группы и группы подстановок обеспечивается отображением, ставящим каждому элементу *a* группы правый сдвиг $\varphi(a):\ \varphi(a)(x)=xa$. Множество всех правых сдвигов относительно суперпозиции образует группу, которая изоморфна данной. Аналог теоремы Кэли для групп справедлив и для полугрупп, это и дает возможность проверки ассоциативности операции.

Итак, для конечного группоида надо выяснить, является ли он полугруппой.

Пример 1. Пусть группоид задан таблицей умножения (таблицей Кэли):

	e	***a***	***b***
e	*e*	*a*	*b*
a	*a*	*b*	*e*
b	*b*	*e*	*a*

Каждому элементу поставим в соответствие его правый сдвиг. Получим множество преобразований:

$$\varphi(e)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ ee & ae & be \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix},$$
$$\varphi(e)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ ea & aa & ba \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix},$$
$$\varphi(e)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ eb & ab & bb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}.$$

Попробуем заполнить таблицу умножения этих преобразований. Так как $\varphi(e)$ – тождественное преобразование, то

$$\varphi(e)\varphi(e)=\varphi(e),$$
$$\varphi(e)\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(e)=\varphi(a),$$
$$\varphi(e)\varphi(b)=\varphi(b)\varphi(e)=\varphi(b).$$

Далее имеем:

$$\varphi(a)\varphi(a)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}=\varphi(b)$$
$$\varphi(a)\varphi(b)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}=\varphi(e)$$
$$\varphi(b)\varphi(a)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}=\varphi(e)$$
$$\varphi(b)\varphi(b)=\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}=\varphi(a)$$

	$\varphi(e)$	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$
$\varphi(e)$	$\varphi(e)$	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$
$\varphi(a)$	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$	$\varphi(e)$
$\varphi(b)$	$\varphi(b)$	$\varphi(e)$	$\varphi(a)$

Таблицы умножения группоидов совпали с точностью до обозначения элементов. Второй из них является полугруппой (операция суперпозиции ассоциативна), следовательно, в первом группоиде операция также ассоциативна.

Пример 2. Пусть группоид задан таблицей:

	e	***a***	***b***
e	*e*	*a*	*b*
a	*a*	*e*	*b*
b	*b*	*b*	*e*

Как и выше, каждому элементу поставим в соответствие правый сдвиг и попытаемся построить таблицу умножения сдвигов. Покажем, что это сделать не удастся. Действительно,

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} e & a & b \\ ee & ae & be \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix},$$

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} e & a & b \\ ea & aa & ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & e & b \end{pmatrix},$$

$$\varphi(b) = \begin{pmatrix} e & a & b \\ eb & ab & bb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & b & e \end{pmatrix}.$$

Но

$$\varphi(b)\varphi(a) = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & b & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ a & e & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

А такого преобразования среди перечисленных нет.

Из этого следует, что операция в данном группоиде не является ассоциативной.

Заметим, что для того, чтобы доказать или опровергнуть ассоциативность операции, совсем не обязательно строить таблицу умножения сдвигов. Достаточно проверить замкнутость множества сдвигов относительно суперпозиции. И тем не менее для глубокого понимания изоморфизма систем есть смысл хотя бы несколько раз построить таблицу умножения сдвигов. Именно одинаковые таблицы умножения доказывают изоморфизм систем.

Однако вопрос об установлении изоморфизма даже конечных систем далеко не всегда решается автоматически. Две таблицы Кэли изоморфных систем могут на первый взгляд быть непохожими. Если количество элементов в одной системе и количество элементов в другой не равны, то студенту понятно, что вопрос об их изоморфизме отпадает (студент уже знает, что для изоморфизма необходимо в первую очередь существование биекции между множествами).

Пусть два конечных группоида, заданные таблицами Кэли, имеют по n элементов. Вопрос о том, изоморфны ли они, разумеется, можно решить за конечное число шагов. Но если сразу не бросаются в глаза какие-то их общие свойства, необходимо перебрать все возможные биекции одного из них на другой. В общем случае таких биекций – n-факториал (число всех подстановок на n-элементном множестве).

Пример 3. Пусть группоиды А = {*a, b*} и В = {*x, y*} заданы таблицами:

A	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*b*	*a*

B	*x*	*y*
x	*y*	*x*
y	*y*	*y*

Являются ли эти группоиды изоморфными?

Мы видим, что в группоиде А элемент *a* играет роль левой единицы. А в группоиде В роль левой единицы играет элемент *b*. Так как свойство «быть левой единицей» сохраняется при изоморфизме, то изоморфизмом может быть лишь отображение, при котором образом *a* является *y*, а образом *b* является *x*. Непосредственной проверкой устанавливаем, что такое отображение, действительно, является изоморфизмом.

Пример 4. Выясним, являются ли изоморфными группоиды, заданные таблицами:

A	*a*	*b*	*c*
a	*b*	*c*	*a*
b	*c*	*a*	*c*
c	*a*	*a*	*b*

B	*z*	*x*	*y*
z	*y*	*x*	*x*
x	*x*	*y*	*z*
y	*z*	*z*	*x*

Ответ на вопрос об изоморфизме группоидов здесь совсем не очевиден. Однако можно просто построить все биекции А в В (их всего 6) и для каждой из них проверить сохраняемость операции.

Заметим, не приводя подробное решение, что изоморфизмом здесь будет отображение, которое ставит в соответствие элементу *a* – *y*, элементу *b* – *z*, элементу *c* – *y*.

Разумеется, решение подобных упражнений требует много времени и внимания, но без них четкое понимание термина «изоморфизм» выработать трудно.

Для будущих учителей математики в качестве изоморфных систем важно привести пример изоморфизма системы всех положительных действительных чисел с операцией умножения и системы всех действительных чисел с операцией сложения. Этот изоморфизм устанавливается отображением, ставящим каждому положительному действительному числу его десятичный логарифм. Это позволяет существенно упростить вычисления: умножение чисел заменить сложением соответствующих логарифмов, деление – вычитанием логарифмов, возведение в натуральную степень – умножением логарифма на натуральное число, извлечение корня натуральной степени из действительного числа – делением логарифма этого числа на показатель степени. Для решения подобных вычислительных задач достаточно уметь по таблице десятичных логарифмов находить логарифм данного числа и по таблице антилогарифмов находить число, логарифм которого известен. Умение пользоваться таблицами позволяет, например, без лишних вычислений найти с достаточной степенью точности корень любой натуральной или рациональной степени из любого положительного числа. Приведем несколько примеров.

Пример 5. Вычислим 0,37·43,2·0,94.

Найдем десятичный логарифм этого произведения, он равен сумме логарифмов, а сумму считать легче.

$$\lg(0,37\cdot 43,2\cdot 0,94)=\lg 0,37+\lg 43,2+\lg 0,94=\bar{1},5682+1,6355+\bar{1},9731=1,1768$$

А теперь по таблице антилогарифмов найдем число N, десятичный логарифм которого равен 1,1768:

$$N=0,37\cdot 43,2\cdot 0,94=15,03$$

Пример 6. Используя таблицы, найдем $\sqrt{2}$.

Пусть $N=\sqrt{2}$. Тогда

$$\lg N=\frac{1}{2}\lg 2=\frac{1}{2}\cdot 0,3010=0,1505$$
$$N=1,413\,.$$

Говоря о формировании математической грамотности учителей математики, нельзя не сказать о теоремах об изоморфизме основных числовых систем. В курсе «Числовые системы» строго доказывается единственность с точностью до изоморфизма каждой числовой системы, изучаемой в школе: системы натуральных чисел, кольца целых чисел, упорядоченного поля рациональных чисел. Разумеется, нет необходимости давать школьникам строгое определение натурального числа. Но математическая грамотность самого учителя предполагает, что он должен рассматривать систему натуральных чисел не как множество {1, 2, ...}, а как систему, удовлетворяющую аксиомам Пеано. И именно аксиомы Пеано позволяют доказать ее единственность.

Аналогично обстоит дело с остальными числовыми системами.

Изучение алгебры, теории чисел и числовых систем на математическом факультете заканчивается теоремой Фробениуса о том, что единственными ассоциативными конечномерными линейными алгебрами с делением являются система действительных чисел, система комплексных чисел и алгебра кватернионов. И доказательство ее предполагает знание линейной алгебры, современной алгебры и теории многочленов.

Таким образом, умение использовать понятие изоморфизма часто позволяет упростить поставленную задачу, сведя ее к аналогичной задаче на изоморфной системе. А это один из необходимых элементов математической грамотности учителя математики.

Заключение

В приведенном исследовании основное внимание уделено вопросу формирования математической грамотности при обучении бакалавров педагогического направления подготовки. Математическая грамотность учителя предполагает очень многое: знание специальной терминологии и умелое ее использование, способность правильно рассуждать, используя неточный чертеж, умение находить разные способы решения одной и той же задачи. Все это приходит не столько при обучении в университете, сколько во время самой работы учителя. Но есть и такие необходимые для учителя умения и навыки, которые формируются именно в процессе обучения. На наш взгляд, это в первую очередь умение упрощать сложные вопросы – сводить новые задачи к уже известным, а именно это умение и формируется при изучении изоморфизма. В данной работе приведены такие задачи, т.к. для учителя математики наиболее важными из них являются вычислительные, дающие возможность умножение чисел сводить к сложению, деление – к вычитанию, задачи, позволяющие фактически устно вычислять корни натуральных (а значит, и рациональных) степеней из любых рациональных чисел.

Перспективы дальнейшего исследования. В данной работе не упоминается о близком к изоморфизму понятии вложения одной алгебраической системы в другую. Можно считать, что изоморфизм – частный случай вложения. Вложение, не являющееся изоморфизмом, отличается лишь отсутствием сюръективности. Но это отличие не позволяет автоматически сводить изучение одних структур к изучению других. Более подробное выяснение роли вложения требует дополнительных исследований.

Источники | References

1. Делюкова Я. В. Теория функций комплексного переменного в системе профессиональной подготовки учителя математики // Перспективы науки. 2020. № 3.
2. Игнатьева И. В. Изучение теории рядов на множестве комплексных чисел в рамках реализации системно-деятельностного подхода обучения математике // Перспективы науки. 2021. № 9.
3. Ляпин Е. С. Полугруппы. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1960.
4. Рослова Л. О., Карамова И. И. О готовности учителей к формированию функциональной математической грамотности школьников // Профильная школа. 2020. Т. 8. № 4.
5. Семенов В. А., Макаридина В. А. Математические методы в гуманитарных исследованиях. М.: Юрайт, 2022.
6. Сиротина И. К. Системный подход к обучению математике // Экономические и гуманитарные исследования регионов. 2021. № 1.
7. Социология управления / под ред. В. Г. Зарубина, В. А. Семенова. М.: Юрайт, 2020.
8. Фирстов В. Е. Концепция изоморфизма при решении текстовых задач школьной алгебры. Саратов, 2017.
9. Швед Е. А. Аспекты формирования понятия «изоморфизм» при изучении раздела (дисциплины) «Алгебра» // Инновационные проекты и технологии в образовании, промышленности и на транспорте: мат. науч. конф. Омск, 2017.
10. PISA 2018 Assessment and Analytical Framework. 2019. URL: https://www.oecd.org/education/pisa-2018-assessment-and-analytical-framework-b25efab8-en.htm

Информация об авторах | Author information

RU **Макаридина Вера Андреевна**[1], к. физ.-мат. н., доц.
[1] Ленинградский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Санкт-Петербург

EN **Makaridina Vera Andreevna**[1], PhD
[1] Leningrad State University named after A. S. Pushkin, St. Petersburg

[1] *makaridv@mail.ru*

Информация о статье | About this article

Дата поступления рукописи (received): 30.03.2022; опубликовано (published): 23.05.2022.

Ключевые слова (keywords): изоморфизм алгебраических систем; математическая грамотность; университетский курс алгебры; будущие учителя математики; isomorphism of algebraic systems; mathematical literacy; university algebra course; future mathematics teachers.