

RU

Структура подготовки будущих учителей математики к применению визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии в школе

Дербуш М. В.

Аннотация. Цель исследования – теоретически обосновать и разработать структуру подготовки будущих учителей математики к проектированию и применению визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии в школе. В статье представлены психолого-педагогические основы и дидактические возможности применения средств визуализации при обучении теории вероятностей; представлена классификация видов визуальных моделей, используемых в школьном курсе математики, и описана структура поэтапной подготовки студентов к их проектированию и применению в профессиональной деятельности. Научная новизна исследования заключается в теоретическом обосновании и разработке трёхэтапной структуры подготовки будущих учителей математики к самостоятельному проектированию визуальных моделей вероятностно-статистической линии, отличительными особенностями которой выступают: классификация визуальных моделей по когнитивной функции (модели-иллюстрации, модели-алгоритмы, модели-симуляции), банк заданий, выстроенный по принципу нарастания продуктивности деятельности студента (декодирование → кодирование → интерпретация → проектирование) и обеспечивающий переход от репродуктивного использования готовых схем к конструированию авторских визуальных дидактических материалов. В результате исследования обоснована необходимость целенаправленного формирования у будущих учителей навыков визуального моделирования вероятностных задач; определены виды визуальных моделей, применяемых при изучении вероятностно-статистической линии; описана структура подготовки студентов к проектированию и использованию визуальных моделей в процессе обучения учащихся курсу «Вероятность и статистика».

EN

Structure of preparing prospective mathematics teachers to apply visual models when teaching the probability and statistics course in school

M. V. Derbush

Abstract. The purpose of the study is to theoretically substantiate and develop a structure for preparing prospective mathematics teachers to design and apply visual models when teaching the probability and statistics course in school. The article presents the psychological-pedagogical foundations and didactic possibilities of using visualization tools in teaching probability theory; the work provides a classification of types of visual models used in the school mathematics curriculum and describes the structure of phased student preparation for designing and applying these models in professional activity. The scientific novelty of the study lies in the theoretical substantiation and development of a three-stage preparation structure for prospective mathematics teachers to independently design visual models for the probability and statistics course. Its distinctive features include: a classification of visual models by cognitive function (illustrative models, algorithmic models, simulation models), a task bank structured on the principle of increasing student productivity (decoding → encoding → interpretation → design), ensuring the transition from the reproductive use of ready-made diagrams to constructing original visual didactic materials. As a result of the study, the necessity of targeted development of visual modeling skills for probabilistic problems among pre-service teachers was substantiated; the types of visual models applied in studying the probability and statistics strand were defined; and the structure of student preparation for designing and using visual models when teaching pupils the “Probability and Statistics” course was described.

Введение

Актуальность данного исследования обусловлена, с одной стороны, включением вероятностно-статистической содержательной линии в обязательный школьный курс математики и объективными трудностями, которые испытывают учащиеся при восприятии абстрактных стохастических закономерностей, что требует поиска эффективных способов их наглядного представления, а с другой – необходимостью совершенствования методической подготовки будущих учителей математики в этой области.

Вместе с тем в современной системе математического образования сохраняется ряд существенных противоречий:

- между требованиями к профессиональной компетентности учителя, предполагающими владение комплексом приемов и средств обучения вероятностно-статистической линии, и отсутствием устоявшейся методики, целенаправленно реализующей когнитивно-визуальный подход в этом разделе математики;
- между дидактической потребностью в применении визуальных моделей в школьном курсе «Вероятность и статистика» и дефицитом в вузовской подготовке выстроенного механизма, связывающего фундаментальные математические знания и частную методику обучения математике.

Проблема исследования заключается в отсутствии теоретически обоснованной структуры поэтапной подготовки будущих учителей математики к самостоятельному проектированию визуальных моделей вероятностно-статистического содержания, обеспечивающей переход от репродуктивного использования готовых схем к конструированию авторских визуальных дидактических материалов, адекватных когнитивно-визуальному подходу и требованиям обновленного школьного курса.

Таким образом, подготовка будущих учителей математики должна включать не только освоение компетенций в области теории вероятностей и методики ее преподавания, но и целенаправленное формирование навыков проектирования визуальных моделей, которые обеспечат успешное освоение курса обучающимися.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- на основе анализа психолого-педагогической и учебно-методической литературы обосновать дидактические возможности визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии и установить состояние проблемы подготовки будущих учителей к их самостоятельному проектированию;
- разработать классификацию визуальных моделей вероятностно-статистической линии по когнитивной функции (модели-иллюстрации, модели-алгоритмы, модели-симуляции) и соотнести выделенные типы с уровнями продуктивности деятельности студента;
- разработать трёхэтапную структуру подготовки будущих учителей математики к проектированию и применению визуальных моделей, включающую банк заданий, выстроенный по принципу нарастания продуктивности деятельности (декодирование → кодирование → интерпретация → проектирование).

Теоретико-методологическую базу исследования составили: труды ярославской методической школы, обосновавшие концепцию наглядно-модельного обучения и технологию перевода внешних действий с моделью во внутренний план мышления (Афанасьев и др., 2002; Смирнов, 1998; Наглядное моделирование в обучении..., 2010); работы в области когнитивно-визуального подхода к обучению математике и развития визуального мышления (Далингер, 2020; Фирер, 2016; Червонный, 2018; Скарбич, 2022), в том числе при подготовке будущих учителей математики к проектированию визуальных дидактических материалов (Цветков, Драгныш, 2018; Червонный, 2018; Сергеева, 2024), а также исследования, посвященные визуализации стохастического материала и использованию визуальных моделей в процессе обучения теории вероятностей (Войтенко, Фирер, 2023; Бахмат, Ефременкова, Обухова, 2019; Ефременкова, Кулешова, Орлов, 2018; Толочко, Пузырева, 2024; Евсеева, 2025; Хаджиева, 2020).

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования: теоретический анализ научно-методической литературы по вопросам преподавания теории вероятности и использования средств наглядности в процессе обучения; сравнительный анализ учебных пособий и методических разработок, используемых при изучении вероятностно-статистической линии; описательный – для характеристики структуры подготовки студентов педагогических вузов к разработке дидактических материалов с опорой на средства визуализации; педагогическое моделирование – для проектирования трёхэтапной структуры подготовки будущих учителей математики к самостоятельному проектированию визуальных моделей вероятностно-статистического содержания.

Практическая значимость исследования заключается в том, что предложенный подход по подготовке будущих учителей математики к проектированию и применению визуальных моделей при изучении вероятностно-статистической содержательной линии будет способствовать совершенствованию процесса обучения теории вероятностей и математической статистике с учетом когнитивных особенностей и образовательных потребностей учащихся.

Обсуждение и результаты

Курс теории вероятностей и математической статистики занимает особое место в системе математического образования, формируя у обучающихся способность анализировать случайные явления и принимать решения

в условиях неопределённости. Однако высокая абстрактность вероятностных понятий и многовариантность предлагаемых задач требуют от педагога умения объяснять сложный математический аппарат с помощью понятных учащимся средств, к числу которых относятся визуальные модели. При этом ключевым фактором успешности данного процесса выступает не наличие самих готовых моделей, а методическая грамотность учителя, его способность проектировать и адаптировать визуальные модели под конкретные дидактические цели.

Анализ современных исследований позволяет выделить несколько содержательных направлений, раскрывающих различные стороны реализации когнитивно-визуального подхода в обучении математике в целом и в обучении вероятностно-статистической линии в частности.

Первую группу исследований составляют работы отечественных ученых (Далингер, 2020; Фирер, 2016; Червонный, 2018), в которых закладываются теоретико-методологические основы когнитивно-визуального подхода к обучению, подчеркивается необходимость перевода наглядности из разряда вспомогательных иллюстративных приемов в категорию ведущих продуктивных средств познания.

В. А. Далингер предлагает «строить процесс обучения математике на основе когнитивно-визуального (зрительно-познавательного) подхода к формированию знаний, умений и навыков, что позволяет максимально использовать потенциальные возможности визуального мышления» (2020, с. 38). Основным инструментом при реализации данного подхода должны быть визуализированные задачи, формирующие устойчивые зрительные образы, которые становятся опорой для абстрактно-логических рассуждений.

В работе А. В. Фирер отмечается, что под визуализацией следует понимать «способ трансформации учебной информации в зрительно-воспринимаемую форму» (2016, с. 234). В качестве основных средств визуализации она выделяет визуальные модели (схемы поиска решения, таблицы, ментальные карты, кластеры) и специальные визуализированные задачи, в которых графический образ не просто сопровождает условие, но задает метод решения и служит опорой для логического анализа.

О важности снятия ограничений на применение «визуальной семиотики как одного из возможных подходов в обучении естественным наукам и математике» говорится в статье М. А. Червонного (2018, с. 238).

Методологические предпосылки такого подхода относятся к концепции наглядно-модельного обучения, разработанной В. В. Афанасьевым, Е. И. Смирновым и их коллегами. В их работах наглядное моделирование рассматривается не как вспомогательный иллюстративный прием, а как самостоятельное средство организации понимающего усвоения математического материала, где модель выступает инструментом разворачивания мыслительных действий (Смирнов, 1998; Афанасьев и др., 2002; Наглядное моделирование в обучении..., 2010). Это положение является важным для теории вероятности, где абстрактные конструкции требуют опосредования знаково-символическими средствами.

Анализ представленных выше исследований показывает, что они носят общедидактический характер и не раскрывают специфики визуализации именно стохастического материала, отличающегося абстрактностью и многовариантностью.

Вторую группу образуют исследования, направленные на уточнение природы и типологии визуальных моделей (Хаджиева, 2020; Скарбич, 2022). Семиотический аспект визуализации подробно рассматривается в работе З. Д. Хаджиевой. Она проводит четкое методическое разграничение между понятиями «наглядный» (связанный с демонстрацией предметов или процессов) и «визуальный», который «относится к области абстрактно-логического мышления» и предполагает создание целостной картины посредством эскизов, чертежей и диаграмм (Хаджиева, 2020, с. 30). Ключевым механизмом формирования математического понимания автор называет умение осуществлять переходы между различными информационными моделями: вербальной, графической, табличной и математической.

Одной из основных единиц когнитивно-визуального подхода является понятие визуальной модели. С. Н. Скарбич определяет визуальную модель как «зрительный образ объекта, воспроизводящий некоторые его существенные свойства и служащий способом свертывания мыслительных содержаний в наглядный образ, который, будучи воспринятым, может быть развернут и служить опорой адекватных мыслительных и практических действий» (2022, с. 103). Она разделяет их на информационные (статические и динамические) и манипулятивные, позволяющие проводить целенаправленные действия с объектом исследования. Этот вывод согласуется с положениями, указанными в работах М. Френдли и Х. Уэйнера (Friendly, Wainer, 2021) о том, что фундаментальная функция визуализации данных всегда заключается в выявлении скрытых закономерностей и преобразовании массивов числовых данных в зрительно воспринимаемые структуры.

Данная типология может быть успешно транслирована в стохастику, где наряду со статическими схемами (деревья, таблицы исходов) активно применяются манипулятивные цифровые симуляции, позволяющие изменять параметры вероятностного эксперимента в реальном времени.

В ходе анализа указанных работ было отмечено, что предлагаемая типология обладает дидактическим потенциалом для теории вероятностей, но требует расширения за счет применения цифровых симуляций случайных экспериментов, а следовательно, и дополнительной методической доработки.

Третью группу составляют работы, посвященные методике визуализации вероятностного материала (Войтенко, Фирер, 2023; Ефременкова, Кулешова, Орлов, 2018; Бахмат, Ефременкова, Обухова, 2019; Толочко, Пузырева, 2024). Методические аспекты внедрения визуальных моделей в вероятностно-статистическую линию подробно анализируются в работе Т. Ю. Войтенко и А. В. Фирер. Авторы отмечают, что сложившаяся практика преподавания теории вероятностей страдает от избыточного формализма, что во многом обусловлено

отсутствием устоявшихся дидактических традиций в этом разделе. Для преодоления указанных трудностей они рекомендуют активно применять шкалы вероятностей, таблицы элементарных исходов и деревья вариантов. При этом подчеркивается эвристическая роль наглядности: графические схемы в стохастике выполняют не только иллюстративную, но и алгоритмическую функцию, непосредственно направляя ход вычислений (Войтенко, Фирер, 2023).

Зарубежные коллеги развивают эту мысль, акцентируя внимание на интерактивных и динамических аспектах визуализации. В частности, М. Пфаннкух, П. Арнольд, К. Дж. Уайлд (Pfnankuch, Arnold, Wild, 2015) демонстрируют, что использование динамических вероятностных инструментов критически важно для формирования у обучающихся адекватных представлений о разбросе выборочных значений и устойчивости относительных частот, которые сложно сформировать, опираясь только на статические схемы на бумаге.

Приемы визуализации комбинаторных и вероятностных задач раскрываются в работах ряда авторов (Ефременкова, Кулешова, Орлов, 2018; Бахмат, Ефременкова, Обухова, 2019; Толочко, Пузырева, 2024). Отмечая повышенную абстрактность и многовариантность таких задач, они предлагают в качестве средств обучения использовать вероятностные схемы, таблицы и вспомогательные графические модели (диаграммы Эйлера–Венна, графы, таблицы, схемы).

Таким образом, авторы единодушно отмечают, что графические схемы в теории вероятностей выполняют не только иллюстративную, но и алгоритмическую функцию, непосредственно направляя ход вычислений. Однако анализ этих исследований позволяет установить, что они ориентированы преимущественно на учащихся основной и старшей школы и описывают приемы работы с уже готовыми визуальными моделями. Вопрос о том, как подготовить учителя к самостоятельному проектированию таких моделей с учетом дидактических целей урока, в указанных работах не рассматривается.

Четвертую группу составляют работы, затрагивающие проблемы цифровой трансформации и подготовки будущих учителей (Евсеева, 2025; Цветков, Драгныш, 2018; Сергеева, 2024).

Так, в работе Е. Г. Евсеевой рассматриваются «примеры вероятностных когнитивно-визуальных моделей, таких как дерево вариантов, дерево вероятностей, диаграммы Эйлера–Венна, граф Марковской цепи, концептуальная карта распределения, диаграмма причинно-следственных связей» и других (2025, с. 34), при реализации которых используются сервисы для создания ментальных карт, онлайн-симуляторы, графические редакторы, программы символьной математики и т. д. Автор отмечает необходимость использования указанных инструментов при когнитивно-визуальном моделировании в условиях цифровизации образования.

Подтверждение эффективности интерактивных методов визуализации и цифровых решений в курсе теории вероятностей получено в недавних отечественных исследованиях. Н. М. Меженная (2026) обосновывает необходимость интерактивной визуализации для снятия когнитивной нагрузки при изучении сложных стохастических концепций, а С. В. Щербатых с соавторами (2025) доказывают, что средства цифрового моделирования способствуют развитию когнитивной мобильности студентов, обеспечивая быстрый и осознанный переход между различными формами представления статистических данных.

Особого внимания заслуживают инновационные направления визуализации стохастики, активно развивающиеся в современной зарубежной и отечественной методике. В контексте STEM-подхода стохастическое содержание всё чаще интегрируется с естественно-научными задачами через концепцию визуальных лабораторий, где учащиеся не решают абстрактные упражнения, а проводят виртуальные эксперименты с реальными данными (экологический мониторинг, биометрические измерения, социологические опросы). Принципиально новым инструментом визуализации условных вероятностей и байесовского вывода выступает *raschinkogram* – динамическая диаграмма, имитирующая механическое распределение шариков по каналам в зависимости от вероятностей ветвления, что обеспечивает интуитивное понимание вероятностей без обращения к алгебраическим формулам. Концепция *visual statistics*, развиваемая М. Френдли и Х. Уэйнером (Friendly, Wainer, 2021), трактует визуализацию как самостоятельный метод статистического исследования, в котором закономерности выявляются непосредственно из графического образа данных.

В ходе изучения психолого-педагогической литературы рассмотрены исследования, которые отмечают необходимость развития визуальной грамотности у студентов – будущих учителей математики (Червонный, 2018; Цветков, Драгныш, 2018; Сергеева, 2024). Говоря о трудностях внедрения теории вероятностей в школьный курс математики, А. А. Цветков и Н. В. Драгныш заключают: «Их (учителей) научили этой дисциплине, но не научили тому, каким образом надо обучать ей детей» (2018, с. 231). Предлагаая в качестве средства обучения материалы в графической форме, они, однако, не рассматривают процесс подготовки студентов и педагогов к их использованию в учебном процессе.

В своей работе М. А. Червонный выделяет два основных процесса становления педагога – «интериоризацию и моделирование» (2018, с. 244), указывая, что именно моделирование выступает «как ведущий вид профессиональной деятельности» (2018, с. 245). Таким образом, визуальное моделирование с опорой на математические модели и мысленный эксперимент становится для будущего учителя не просто дидактическим приемом, а необходимой составляющей его профессиональной деятельности.

Сопоставление указанных работ показывает, что, несмотря на признание необходимости развития визуальной грамотности студентов, в них отсутствует описание процесса подготовки будущих учителей к проектированию визуальных дидактических материалов по вероятностно-статистической содержательной линии.

Таким образом, обобщение рассмотренных исследований позволяет констатировать наличие научного пробела: при очевидной дидактической ценности визуальных моделей в стохастике и признании важности визуальной грамотности педагога, в современной методико-математической литературе недостаточно разработана структура целенаправленной поэтапной подготовки будущих учителей математики к самостоятельно-му проектированию и применению визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии. Устранение этого пробела требует переориентации подготовки будущих учителей математики: от трансляторов уже готовых визуальных моделей при решении вероятностно-статистических задач к их самостоятельно-му проектированию с учетом образовательных возможностей и потребностей учащихся.

Реализация указанного подхода требует от будущего педагога знаний всех знаково-символических средств, которые могут использоваться в школьном курсе «Вероятность и статистика». В рамках настоящего исследования проведена классификация визуальных моделей вероятностно-статистической линии, в основу которой положена когнитивная функция модели в учебном процессе. Выделены три группы: модели-иллюстрации, обеспечивающие создание зрительного образа стохастической ситуации; модели-алгоритмы, структура которых непосредственно задаёт план вычислительных действий; модели-симуляции, позволяющие интерактивно воспроизводить случайный эксперимент и варьировать его параметры. Такая классификация позволяет соотнести каждый тип моделей с конкретным этапом подготовки будущего учителя и с определённым уровнем продуктивности его деятельности (Рисунок 1).

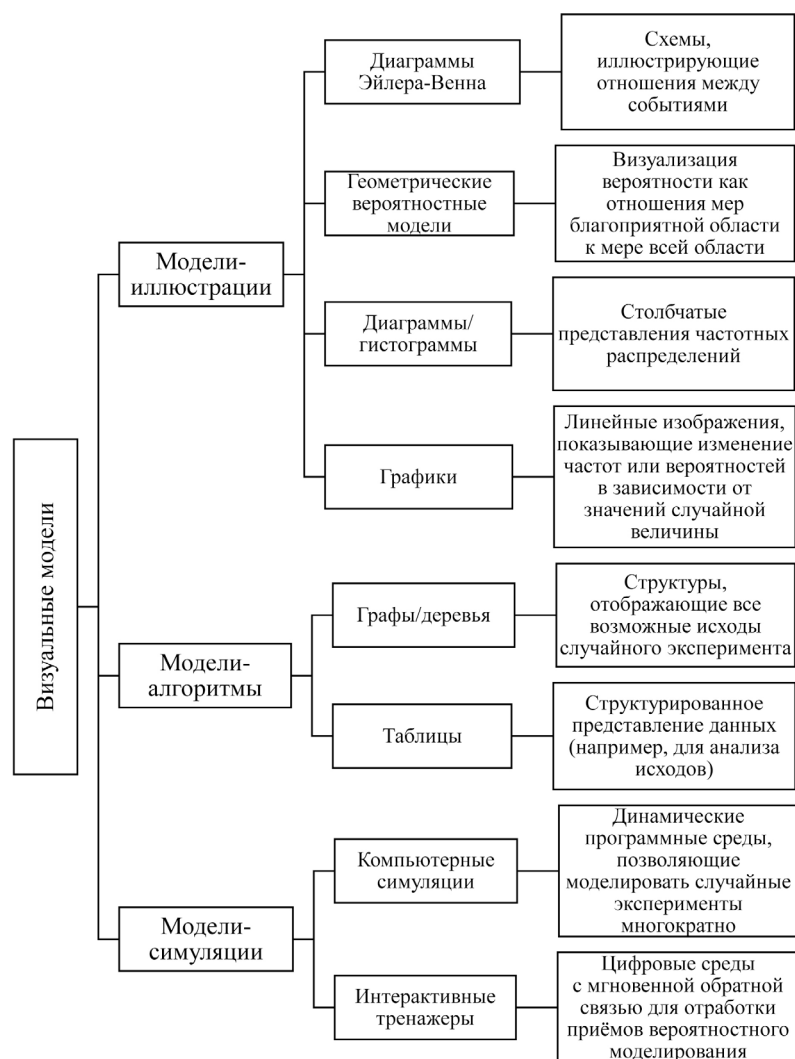


Рисунок 1. Виды визуальных моделей, используемые при обучении вероятностно-статистической линии в школе

Отметим, что модели-иллюстрации используются, в первую очередь, при формировании понятий, модели-алгоритмы – при решении задач и отработке вычислительных навыков, а модели-симуляции – при исследовании закономерностей и проверке гипотез.

Представленная классификация визуальных моделей позволяет структурировать инструментарий будущего учителя. Дидактический потенциал каждой группы моделей специфичен: диаграммы Эйлера-Венна незаменимы при изучении алгебры событий и операций над ними; геометрические модели обеспечивают переход к непрерывным вероятностным пространствам; графики и гистограммы используются для первичного статистического анализа данных, компьютерные симуляции позволяют в реальном времени демонстрировать статистическую устойчивость частот.

Однако наиболее универсальными и часто применяемыми в школьном курсе при решении комбинаторных и вероятностных задач являются графы и деревья исходов. Именно они наиболее полно раскрывают функцию наглядности, поэтому далее подробно рассмотрим особенности работы с ними на конкретных примерах.

Дидактический потенциал графов, в частности вероятностных деревьев, наиболее полно раскрывается при изучении комбинаторики и базовых теорем. Дерево исходов служит опорной схемой, позволяющей учащимся наглядно разложить сложный эксперимент на элементарные события и зафиксировать вероятности ветвлений.

Пример 1. Монету подбрасывают три раза. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза.

Визуальная модель к задаче в виде дерева исходов, которое фиксирует все возможные ситуации выпадения орла и решки, представлена на Рисунке 2.

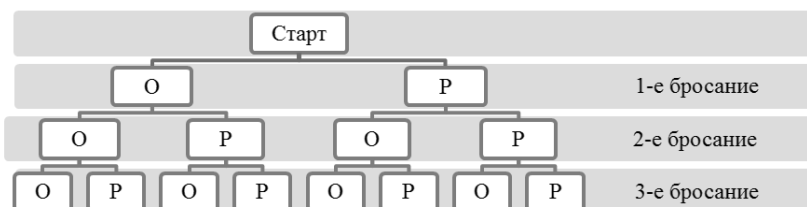


Рисунок 2. Дерево исходов при решении задачи на использование классического определения вероятности

Для решения задачи на основе классического определения вероятности необходимо найти общее число исходов после трех бросаний и число благоприятных исходов, т. е. тех, когда ветвь дерева содержит 2 орла.

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{3}{8}$.

Важное значение данная визуальная модель имеет при изучении формулы полной вероятности. При решении контекстных задач, сюжет которых предполагает полную группу несовместных событий, построение дерева исходов демонстрирует дальнейший план решения.

Пример 2. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным (Источник: <https://ege.sdangia.ru/problem?id=320207>).

Визуальная модель к данной задаче представлена на Рисунке 3.

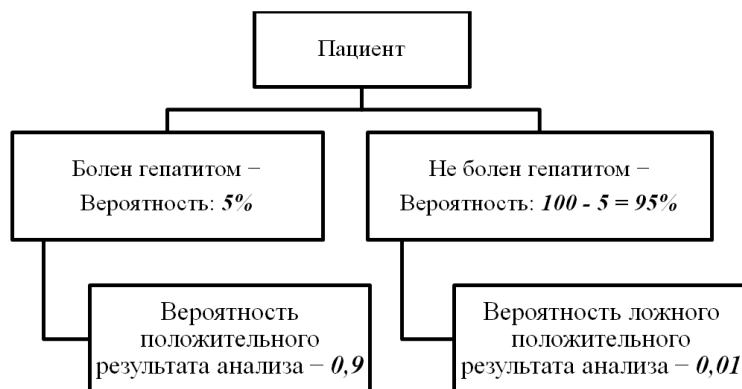


Рисунок 3. Дерево исходов при решении задачи на использование формулы полной вероятности

Две ветви данного графа представляют собой независимые события, исходя из чего решение задачи имеет вид: $P(A + B) = 0,05 * 0,9 + 0,95 * 0,01 = 0,0545$.

Использование визуальных моделей целесообразно как на этапе введения понятий, так и при решении задач, так как они обеспечивают переход от наглядно-образного к абстрактно-логическому мышлению учащихся.

Многообразие и специфика указанных визуальных моделей требуют их системной интеграции в вузовскую подготовку, охватывая все дисциплины учебного плана, в которых рассматривается вероятностно-статистическая содержательная линия. Их системная интеграция в вузовскую подготовку осуществляется посредством трёхэтапной структуры (Рисунок 4), в которой каждому этапу соответствуют определённые типы моделей (по когнитивной функции), уровень деятельности студента.

Каждый из трёх этапов реализует принцип нарастания продуктивности деятельности студента: от декодирования (чтение и восстановление готовой модели) через кодирование (перевод вербального условия в графическую форму) и интерпретацию (сравнение и обоснование выбора модели) к проектированию (создание авторских визуальных дидактических материалов).



Рисунок 4. Структура подготовки будущих учителей к проектированию и применению визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии

Пропедевтический этап подготовки студентов осуществляется при изучении раздела «Комбинаторика и теория вероятностей» в курсе «Элементарная математика». На занятиях студентами обобщаются и систематизируются знания, отрабатываются приемы решения вероятностных задач. Однако будущие педагоги не только решают уже знакомые задачи, но и учатся проектировать базовые визуальные модели (таблицы элементарных исходов, деревья вариантов, диаграммы Эйлера-Венна), анализируя их возможности при использовании на уроках. Предлагаемые педагогом задания ориентированы на перевод вербальных условий комбинаторных и вероятностных задач в наглядную форму.

Пример 3. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8, при условии, что хотя бы на одной кости выпало число больше 4.

1. Решите задачу, используя формулы условной вероятности.

Решение: Пусть A – сумма выпавших очков равна 8, B – хотя бы на одной кости выпало число больше 4 (то есть 5 или 6).

Необходимо найти условную вероятность, которая вычисляется по формуле: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, где $P(A \cap B)$ – вероятность одновременного наступления событий A и B , $P(B)$ – вероятность наступления события B .

Общее количество исходов при бросании двух костей: $6 \times 6 = 36$.

Найдем $P(A \cap B)$. Выпишем все исходы, при которых сумма очков равна 8 (событие A): (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Выберем из этого списка только те, которые удовлетворяют условию события B (хотя бы одна кость > 4): (2, 6), (3, 5), (5, 3), (6, 2). Таким образом, благоприятных исходов 4. Значит, $P(A \cap B) = 4/36$.

Найдем $P(B)$. Количество исходов, противоположных событию B (то есть когда на обеих костях выпало число 4 или меньше): $4 \times 4 = 16$. Следовательно, число благоприятных исходов для события B : $36 - 16 = 20$, а $P(B) = 20/36$.

Таким образом, $P(A|B) = \frac{4/36}{20/36} = \frac{1}{5} = 0,2$.

2. Проверьте найденное решение с помощью построения визуальной модели по следующему плану:

- построить таблицу всех возможных исходов данного случайного эксперимента, где строки соответствуют исходам первой кости, а столбцы – второй;
- визуально выделить в таблице ячейки, удовлетворяющие условию события (сумма равна 8), и ячейки, удовлетворяющие условию (хотя бы одна кость > 4);
- на основе построенной таблицы вычислить искомую условную вероятность.

В ходе выполнения указанных действий у студентов получается таблица (Таблица 1).

Таблица 1. Табличная модель при решении задачи на условную вероятность

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8 ✓
3	4	5	6	7	8 ✓	9
4	5	6	7	8 ✓	9	10
5	6	7	8 ✓	9	10	11
6	7	8 ✓	9	10	11	12

В таблице цветом выделены ячейки, удовлетворяющие условию, что хотя бы одна кость больше 4, а «галочкой» – сумма очков равна 8. Таким образом, $P(B) = 20/36$, а $P(A \cap B) = 4/36$. Значит, $P(A|B) = \frac{1}{5} = 0,2$.

Подобные задания, в которых студентам необходимо решить предлагаемую задачу с помощью теорем и формул теории вероятностей, а затем решить эту же задачу с использованием визуальной модели, помогают будущим педагогам преодолеть разрыв между формально-логическим аппаратом и его наглядной интерпретацией. Сопоставляя аналитическое и графическое решения, студенты не только глубже осознают механизм действия вероятностных формул, но и овладевают навыком перекодирования информации – умения транслировать математические конструкции на язык зрительных образов.

Приведем примеры заданий, которые предлагаются студентам на пропедевтическом этапе.

Задание 1 (декодирование). Дано готовое дерево вероятностей, описывающее двухэтапный случайный эксперимент, в котором пропущены числовые значения вероятностей на трёх ветвях второго уровня и итоговые вероятности на двух конечных узлах. Восстановите пропущенные значения, опираясь на правило умножения вероятностей и свойство полноты группы. По восстановленной модели сформулируйте словесное описание реального случайного эксперимента, который она моделирует.

Задание 2 (кодирование). В регионе 60% жителей регулярно пьют чай, 30% – кофе, а 10% употребляют оба напитка. Постройте диаграмму Эйлера-Венна, отражающую данное распределение. На основе построенной модели вычислите вероятность того, что случайно выбранный житель предпочитает хотя бы один из двух напитков. Обоснуйте, почему для данной задачи использование дерева вероятностей менее целесообразно, чем диаграмма Эйлера-Венна.

Теоретический этап подготовки связан с изучением фундаментального курса «Теория вероятностей и математическая статистика». В ходе изучения теоретических понятий и решения задач студенты под руководством педагога обращаются к различным видам визуальных моделей, переходя от простых школьных схем к более сложным конструкциям: геометрическим вероятностным моделям, деревьям вероятностей, таблицам сопряженности, кривым и полигонам распределений и т. д. К числу основных задач этого этапа относятся: овладение студентами математическим аппаратом курса; подготовка к преподаванию курса «Вероятность и статистика» в школе, в том числе с использованием различных видов визуальных моделей.

Приведем примеры заданий, предлагаемых студентам на данном этапе.

Задание 3 (интерпретация). Рассмотрим задачу на применение формулы полной вероятности (фабрики-поставщики и процент брака). Предложите две альтернативные визуальные модели этой задачи: дерево вероятностей и двумерную частотную таблицу. Сравните модели по трём критериям: а) полнота отражения причинно-следственной структуры эксперимента; б) удобство вычисления условных вероятностей (в частности, вероятности того, что бракованное изделие поступило с конкретной фабрики); в) пригодность для объяснения материала учащимся в школе.

Задание 4 (кодирование и интерпретация). 1. Используя среду GeoGebra, постройте динамическую модель, демонстрирующую закон больших чисел на примере серии независимых испытаний Бернулли. Модель должна включать ползунок для изменения вероятности успеха и счётчик количества испытаний, автоматически строящий гистограмму относительных частот. Проанализируйте, при каком минимальном количестве испытаний относительная частота стабилизируется в заданном доверительном интервале. 2. Провести серию из 200 испытаний Бернулли в среде GeoGebra, зафиксировать поведение относительной частоты при трёх различных значениях вероятности успеха (0,1; 0,5; 0,9), построить совмещённый график и на его основе сформулировать гипотезу о связи между величиной p и скоростью стабилизации частоты. Полученные результаты фиксируются в виде короткого письменного отчёта, содержащего гипотезу о минимальном числе испытаний и её графическое обоснование. Это задание носит исследовательский характер.

Третий этап профессиональной подготовки носит проектно-методический характер, реализуемый при изучении дисциплины «Методика обучения математике». На этом этапе происходит переход от анализа готовых визуальных моделей к их самостоятельному проектированию для использования на уроках курса «Вероятность

и статистика». Студенты разрабатывают комплексы учебных заданий, содержащих визуализированные материалы, и технологические карты уроков по вероятностно-статистической линии, в том числе с использованием манипулятивных цифровых сред. К числу цифровых ресурсов относятся распространенные программы динамической математики (GeoGebra и другие), дидактический потенциал которых в обучении теории вероятностей подробно раскрыт в работе А. С. Гребенкиной (2024), сервисы для создания интерактивных упражнений (1С: Урок и другие) и специализированных ресурсов для демонстрации случайных событий. На Рисунке 5 представлен пример использования компьютерной симуляции на платформе «1С: Урок» при изучении формулы Бернулли.



Рисунок 5. Визуализация формулы Бернулли на портале «1С: Урок»

(https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/teoriya_veroyatnostey/trenazhyery/179860.phpd)

Реализация проектно-методического этапа требует от студентов перехода от репродуктивных действий к творческому конструированию визуальных моделей. С этой целью разработан ряд заданий, направленных на формирование компетенций по проектированию визуальных моделей, применяемых при обучении вероятностно-статистической линии.

Задание 5 (интерпретация). Выполнить анализ фрагмента школьного учебника по теме «Условная вероятность»: выявить используемые визуальные модели, оценить их соответствие дидактической цели и предложить альтернативную модель, обосновав выбор с точки зрения когнитивной функции (иллюстрация, алгоритм, симуляция).

Задание 6 (проектирование). Разработать рабочий лист для учащихся 9 класса по теме «Условная вероятность». Включить в лист задачу, условие которой требует сужения пространства элементарных исходов (например, задача с игральными костями или картами). Сконструировать таблицу исходов таким образом, чтобы ее структура визуально задавала план решения: выделение условия и подсчет благоприятных исходов.

Задание 7 (проектирование). Разработать серию из трех взаимосвязанных задач по теме «Дерево случайного опыта», выстроенную по принципу нарастания продуктивности деятельности учащихся:

- задача на декодирование: ученику дается готовое дерево вероятностей с пропущенными числовыми данными, которые необходимо восстановить, используя свойства графа;
- задача на кодирование: ученику дается вербальное условие многошагового эксперимента, по которому необходимо построить дерево и вычислить вероятность сложного события;
- задача на интерпретацию: по построенному дереву сформулировать словесное описание реального жизненного события, которое оно моделирует.

Задание 8 (проектирование). Создать наглядное пособие (плакат, цифровая схема или серия карточек) для введения операций над событиями (объединение, пересечение, разность, противоположное событие) с использованием визуальной модели – диаграмма Эйлера-Венна.

Задание 9 (проектирование). Выбрать одну из тем вероятностно-статистической линии (например, «Классическое определение вероятности», «Независимые события», «Статистическое распределение» и др.) и разработать технологическую карту фрагмента урока (15-20 минут), реализуемого в условиях когнитивно-визуального подхода.

Для реализации разработанной структуры подготовки был сформирован целостный банк заданий, включающий 30 упражнений, распределенных по трем этапам и соответствующим учебным дисциплинам. Отбор заданий осуществлялся по принципу нарастания продуктивности деятельности студента: от декодирования готовых моделей к их самостоятельному проектированию. Количественное распределение заданий представлено в Таблице 2.

Таблица 2. Распределение банка заданий по этапам и уровням продуктивности деятельности

Этап подготовки	Кол-во заданий	Декодирование	Кодирование	Интерпретация	Проектирование	Типы визуальных моделей
Пропедевтический	10	4	5	1	0	Деревья, таблицы исходов, диаграммы Эйлера-Венна
Теоретический	10	2	3	4	1	Графы/деревья, геометрические модели, диаграммы/гистограммы, графики
Проектно-методический	10	0	1	3	6	Все модели
Итого	30	6	9	8	7	

Распределение заданий в таблице привязано одновременно к дисциплинам учебного плана и к логике усложнения деятельности студента – от чтения чужой модели к созданию собственной. На пропедевтическом этапе преобладают задания на декодирование и кодирование (9 из 10), что обусловлено самой задачей этапа – научить студента «читать» готовую схему и переводить вербальное условие в графическую форму, не требуя пока самостоятельного выбора типа модели. На теоретическом этапе доля интерпретационных заданий возрастает до четырёх, поскольку освоение математического аппарата курса предполагает осознанный выбор между альтернативными способами визуализации одного и того же вероятностного факта. Проектно-методический этап смещает акцент на проектирование (6 из 10 заданий): студент конструирует авторские дидактические материалы, не ограниченные заранее заданным типом модели.

Апробация разработанной структуры подготовки будущих учителей математики к применению визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии в школе проходила на базе Омского государственного педагогического университета в 2024-2026 учебных годах. В ней приняли участие студенты-бакалавры, обучающиеся по профилям «Математика и информатика», «Физика и математика» и «Математическое образование» в количестве 82 человек.

Поскольку все участники исследования осваивают единый образовательный стандарт, выделение контрольной группы было признано нецелесообразным. Валидность и достоверность результатов обеспечивались за счет применения одноруппового плана формирующего эксперимента с предварительным и итоговым тестированием, а также строгой стандартизацией диагностического инструментария и процедур оценки.

Оценка сформированности умений визуального моделирования проводилась по трём критериям: полнота перекодирования вербального условия в графическую форму, соответствие типа выбранной модели дидактической цели задачи и корректность отображения вероятностных связей. По каждому критерию выделялось три уровня сформированности – низкий, средний и высокий. Для разграничения уровней были зафиксированы конкретные показатели, по которым работа студента однозначно относилась к тому или иному уровню. С целью обеспечения объективности и надежности измерений итоговая экспертиза студенческих работ проводилась двумя независимыми экспертами, коэффициент согласованности мнений которых показал значение $k = 0,84$, что подтверждает высокую степень надежности диагностического инструментария.

На констатирующем этапе студентам было предложено решить три вероятностные задачи (на классическую вероятность, формулу полной вероятности и условную вероятность) и предложить наглядную интерпретацию решения. Анализ показал, что 78% студентов успешно справлялись с аналитическим решением задач, однако лишь 32% смогли самостоятельно построить адекватную визуальную модель (дерево исходов, таблица или диаграмма Эйлера-Венна). При этом типичными затруднениями являлись: неумение выделить в условии задачи структуру, подлежащую визуализации (54%); формальное построение схемы без учёта её функции (41%); затруднения при переходе от аналитического решения к графическому и обратно (48%). Полученные данные подтвердили наличие разрыва между формально-логическим аппаратом теории вероятностей и способностью к его наглядной интерпретации, что обосновывает необходимость целенаправленного формирования навыков визуального моделирования.

После прохождения пропедевтического и теоретического этапов (работа с таблицами, деревьями, диаграммами и геометрическими вероятностными моделями) число студентов, верно выстраивающих визуальный образ задачи, возросло до 64%, при этом наиболее выраженная положительная динамика наблюдалась по критерию «кодирование». На итоговом срезе, после проектно-методического этапа, этот показатель достиг 86%, при этом по критерию «проектирование» высокий уровень продемонстрировали 62% студентов. В выполненных студентами заданиях и фрагментах уроков фиксировалось не просто наличие рисунка, а продуманная структура, ведущая школьника от визуального образа к формуле (например, цветовое кодирование на таблицах или пошаговое «разворачивание» дерева вероятностей).

Вместе с тем анализ работ студентов, не достигших высокого уровня, позволил выделить ряд устойчивых затруднений, сохраняющихся на итоговом срезе. Так, 14% студентов испытывали трудности при выборе вида визуальной модели, соответствующей цели урока, предпочитая наиболее знакомые конструкции (таблицы исходов) даже в ситуациях, где более эффективными являлись деревья вероятностей или диаграммы Эйлера-Венна. 9% студентов демонстрировали формальный подход к проектированию, воспроизводя структуры из учебника без адаптации к конкретным условиям задачи и уровню подготовки учащихся. Указанные затруднения подтверждают необходимость включения в структуру подготовки специальных заданий на интерпретацию и сравнение альтернативных моделей, а также заданий, требующих обоснования выбора визуального средства с позиции когнитивной функции модели.

Для статистического подтверждения эффективности разработанной структуры внутри одной выборки был применен критерий Вилкоксона для зависимых выборок. Сравнение суммарных баллов по критериям на входе и выходе из эксперимента показало статистически значимую положительную динамику ($W = 412$, $p < 0,001$).

По итогам анкетирования были выявлены следующие качественные изменения:

- 72% респондентов отметили, что выполнение заданий на «перекодирование» (решить задачу формулами, а затем – визуальной моделью) помогло им «увидеть» внутреннюю логику вероятностных теорем, которую ранее они воспринимали формально;
- 68% указали, что самым полезным заданием стала разработка рабочих листов, поскольку она потребовала не просто нарисовать схему, а продумать, как по ней вести диалог с учеником и какие вопросы задавать на каждом шаге;
- 86% студентов выразили уверенность в том, что будут систематически применять визуальные модели в своей будущей профессиональной деятельности, причём не только как «украшение» урока, но как инструмент диагностики понимания учащихся.

Отметим риски, которые могут возникнуть при визуализации стохастического материала:

1) формальное усвоение материала без понимания его логической основы. Как справедливо отмечается в исследованиях когнитивной мобильности (Щербатых и др., 2025), цифровые и визуальные средства должны выступать катализатором мыслительных операций, а не их заменой. Поэтому важно не заменять определения понятий и доказательство теорем иллюстрациями, а грамотно дополнять теоретическое содержание визуальными моделями;

2) некорректный выбор вида визуальной модели (например, использование громоздкой таблицы для многошаговых экспериментов вместо дерева вероятностей) может усложнить понимание учащимися изучаемого материала;

3) проблема технического характера, связанная с необходимостью освоения студентами специализированных программных продуктов для создания динамической наглядности по вероятностно-статистической линии.

Описанная поэтапная структура формирования готовности будущих учителей к проектированию и использованию визуальных моделей при обучении вероятностно-статистической линии позволяет подготовить их к преподаванию курса «Вероятность и статистика».

Заключение

Включение вероятностно-статистической линии в школьный курс математики актуализировало проблему подготовки учителей, способных преодолевать когнитивные барьеры учащихся при изучении стохастики. Анализ литературы показал, что эффективным средством решения проблемы выступают визуальные модели, составляющие основу когнитивно-визуального подхода.

В рамках исследования описаны виды визуальных моделей, а также предложена структура поэтапной подготовки будущего учителя к их проектированию и использованию в процессе обучения теории вероятностей. Интеграция элементов визуального моделирования в курсы «Элементарная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Методика обучения математике» обеспечивает преемственность формирования соответствующих компетенций: от умения решать задачи с использованием визуальных моделей до навыка создания авторских дидактических материалов.

Перспективы дальнейшего исследования связаны с изучением когнитивных механизмов восприятия вероятностного материала школьниками с различными стилями мышления, что позволит обосновать алгоритмы адаптивного подбора средств визуализации. Кроме того, представляет научный интерес изучение эффективности интеграции средств виртуальной и дополненной реальности в преподавание теории вероятностей для моделирования сложных случайных экспериментов.

Источники | References

1. Афанасьев В. В., Поваренков Ю. П., Смирнов Е. И., Шадриков В. Д. Подготовка учителя математики: инновационные подходы / под ред. В. Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002.
2. Бахмат В. И., Ефременкова О. В., Обухова Г. А. Визуализация решения вероятностных задач с использованием схем и таблиц в обучении // Вестник Казахского национального университета. Серия «Педагогические науки». 2019. Т. 60. № 3. <https://doi.org/10.26577/JES.2019.v60.i3.08>
3. Войтенко Т. Ю., Фирер А. В. Визуальные модели учебной информации при обучении теории вероятностей // Современные проблемы науки и образования. 2023. № 4. <https://doi.org/10.17513/spno.32881>
4. Гребенкина А. С. Некоторые применения программы Geogebra в обучении теории вероятностей // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы IX Международной научной конференции (г. Донецк, 15-17 октября 2024 года). Донецк: Донецкий государственный университет, 2024. Т. 6: Педагогические науки. Ч. 3.
5. Далингер В. А. Особенности когнитивно-визуальной технологии обучения учащихся общеобразовательных школ математике // Тенденции развития науки и образования. 2020. № 58-7. <https://doi.org/10.18411/lj-02-2020-141>

6. Евсеева Е. Г. Когнитивно-визуальное моделирование в обучении теории вероятностей // Эвристическое обучение математике: сборник трудов VIII Международной научно-методической конференции: в 2 ч. (г. Донецк, 18-20 декабря 2025 года). Донецк: Донецкий государственный университет, 2025. Ч. 1.
7. Ефременкова О. В., Кулешова И. И., Орлов А. В. Визуализация решения вероятностных задач в условиях развивающей образовательной среды // Мир науки, культуры, образования. 2018. № 4 (71).
8. Меженная Н. М. Об использовании интерактивных методов визуализации при изучении курса теории вероятностей // Математика в техническом университете. 2026. № 1.
9. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учебное пособие / под ред. Е. И. Смирнова. Ярославль: ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2010.
10. Сергеева Л. А. Развитие визуальной грамотности будущих учителей начальной школы в процессе изучения математических дисциплин // Высшее образование сегодня. 2024. № 5.
11. Скарбич С. Н. Визуальные модели в процессе обучения учащихся функциям в курсе математики // Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе: материалы II Всероссийской научно-практической конференции (г. Омск, 01-03 марта 2022 года). Омск: Омский государственный педагогический университет, 2022.
12. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике: монография. Ярославль: ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 1998.
13. Толочко М. В., Пузырева Е. Н. Математическое моделирование в решении задач по теории вероятностей школьного курса математики // Ученые записки Брянского государственного университета. 2024. № 1 (33).
14. Фирер А. В. Визуализация учебной информации как средство развития познавательных универсальных учебных действий школьников при обучении алгебре // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева. 2016. № 2 (36).
15. Хаджиева З. Д. Визуализация на занятиях по математике // Высшее образование сегодня. 2020. № 3.
16. Цветков А. А., Драгныш Н. В. Особенности адаптирования методики преподавания теории вероятностей для эффективного восприятия школьниками // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. 2018. № 1.
17. Червонный М. А. Визуализация в обучении школьников физике и математике и подготовке будущих учителей // Праксема. Проблемы визуальной семиотики. 2018. № 4 (18). <https://doi.org/10.23951/2312-7899-2018-4-235-250>
18. Щербатых С. В., Лыкова К. Г., Игонина Е. В., Симоновская Г. А. Развитие когнитивной мобильности при обучении теории вероятностей и математической статистике студентов средствами цифровых решений // Перспективы науки и образования. 2025. № 2 (74).
19. Friendly M., Wainer H. A History of Data Visualization and Graphic Communication. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2021.
20. Pfannkuch M., Arnold P., Wild C. J. What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability // Educational Studies in Mathematics. 2015. Vol. 88. № 3. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1>

Информация об авторах | Author information



Дербуш Марина Викторовна¹, к. пед. н., доц.

¹ Омский государственный педагогический университет



Marina Viktorovna Derbush¹, PhD

¹ Omsk State Pedagogical University

¹ marderb@mail.ru

Информация о статье | About this article

Дата поступления рукописи (received): 17.07.2026; опубликовано online (published online): 25.08.2026.

Ключевые слова (keywords): методическая подготовка будущих учителей математики; вероятностно-статистическая линия в школе; визуальное моделирование; конструирование визуальных моделей; приемы использования визуальных моделей в обучении; methodological training of prospective mathematics teachers; probability and statistics school course; visual modeling; construction of visual models; techniques for using visual models in teaching.